

Matematika A3 – 1. ZH

Definíciók és tételek (1–5. hét)

1. hét — Kombinatorika

1.0.1 Definíció Egymástól páronként különböző $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemek egy lehetséges sorrendjét az $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemek egy *ismétlés nélküli permutációjának* nevezzük.

1.0.2 Tétel Ha P_n jelöli páronként különböző n elem összes ismétlés nélküli permutációinak számát, akkor $P_n = n!$.

1.0.4 Definíció Ha az $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemek között egyenlők is vannak, akkor ezen elemek egy lehetséges sorrendjét az $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemek egy *ismétléses permutációjának* nevezzük.

1.0.5 Tétel Ha az $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemek között r különbözőféle van, és ezek száma rendre $k_1, k_2, \dots, k_r$, valamint $P_n^{(k_1, \dots, k_r)}$ jelöli az $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemek összes ismétléses permutációinak számát, akkor

$$P_n^{(k_1, \dots, k_r)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!}$$

1.0.8 Definíció Egymástól páronként különböző $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemekből képezhető olyan k -elemű sorozatokat, amelyekben az $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemek mindegyike legfeljebb egyszer fordul elő, az $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemek egy *k -adosztályú ismétlés nélküli variációjának* nevezzük.

1.0.9 Tétel Ha V_n^k jelöli adott, páronként különböző n elemből képezhető összes k -adosztályú ismétlés nélküli variációk számát, akkor

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

1.0.12 Definíció Egymástól páronként különböző $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemekből képezhető olyan k -elemű sorozatokat, amelyekben az $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemek mindegyike többször is előfordulhat, az $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemek egy *k -adosztályú ismétléses variációjának* nevezzük.

1.0.13 Tétel Ha $V_n^{k,i}$ jelöli adott, páronként különböző n elemből képezhető összes k -adosztályú ismétléses variációk számát, akkor

$$V_n^{k,i} = n^k.$$

1.0.15 Definíció Egymástól páronként különböző $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemekből képezhető k -elemű halmazokat az $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemek egy k -adosztályú ismétlés nélküli kombinációjának nevezzük.

1.0.16 Tétel Ha C_n^k jelöli adott, páronként különböző n elemből képezhető összes k -adosztályú ismétlés nélküli kombinációk számát, akkor

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1.0.19 Definíció Egymástól páronként különböző $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemekből képezhető k -elemű rendszereket (azaz k számú elem olyan összességét, amelyek között egyenlők is lehetnek) az $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemek egy k -adosztályú ismétléses kombinációjának nevezzük.

1.0.20 Tétel Ha $C_n^{k,i}$ jelöli adott, páronként különböző n elem összes k -adosztályú ismétléses kombinációinak számát, akkor

$$C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k}.$$

1. hét — Eseménytér, eseményalgebra

2.1.1 Definíció Egy véletlen tömegjelenség előfordulását vagy megfigyelését *kísérletnek* nevezzük.

2.1.2 Definíció Egy kísérlet lehetséges kimeneteleit *elemi eseményeknek* nevezzük.

2.1.3 Definíció Egy kísérlettel kapcsolatos elemi események halmazát *eseménytérnek* nevezzük. Az eseményteret Ω -val jelöljük.

2.1.4 Definíció Egy kísérlettel kapcsolatos Ω eseménytér részhalmazait a kísérlettel kapcsolatos *eseményeknek* nevezzük. Egy eseményről akkor mondjuk, hogy *bekövetkezik*, ha az eseményt alkotó elemi események valamelyike bekövetkezik.

2.2.1 Definíció Egy Ω eseménytér elemeiből álló A és B események $A+B$ összegén azt az eseményt értjük, amely akkor és csak akkor következik be, ha az A és B események közül legalább az egyik bekövetkezik (azaz $A+B = A \cup B$).

2.2.2 Definíció Egy Ω eseménytér elemeiből álló A és B események AB szorzatán azt az eseményt értjük, amely akkor és csak akkor következik be, ha az A és B események mindegyike bekövetkezik (azaz $AB = A \cap B$).

2.2.3 Definíció Ha az A és B eseményekre $AB = \emptyset$ teljesül (azaz egyszerre nem következhetnek be), akkor azt mondjuk, hogy A és B egymást kizáró események.

2.2.4 Definíció Egy Ω eseménytér elemeiből álló A és B események $A - B$ különbségén azt az eseményt értjük, amely akkor és csak akkor következik be, ha az A esemény bekövetkezik, de a B esemény nem (azaz $A - B = A \setminus B$).

2.2.5 Definíció Egy Ω eseménytér eseményeiből álló A halmaz esetén az $\bar{A} = \Omega \setminus A$ eseményt az A esemény *ellentett eseményének* nevezzük, azaz $\bar{A}$ az az esemény, amely akkor és csak akkor következik be, ha az A esemény nem következik be.

2.2.6 Definíció Legyen Ω egy kísérlettel kapcsolatos eseménytér. Az Ω részhalmazainak valamely $E(\Omega)$ összességét *eseményalgebrának* (vagy Ω feletti σ -algebrának) nevezzük, ha teljesülnek rá az alábbi feltételek:

- (1) A biztos esemény eleme $E(\Omega)$ -nak (azaz $\Omega \in E(\Omega)$).
- (2) $E(\Omega)$ -hoz tartozó tetszőleges A esemény esetén annak $\bar{A}$ ellentett eseménye is $E(\Omega)$ -hoz tartozik.
- (3) Az $E(\Omega)$ tetszőleges véges vagy végtelen sok A_i eseményei esetén azok $\sum_i A_i$ összege is eleme $E(\Omega)$ -nak.

1. hét — Valószínűségi algebra, klasszikus valószínűség

2.3.1 Definíció Legyen $E(\Omega)$ egy kísérlettel kapcsolatos Ω eseménytéren értelmezett olyan eseményalgebra, amelyhez tartozó minden egyes A eseményhez hozzá van rendelve egy $P(A)$ -val jelölt valós szám úgy, hogy az alábbiak teljesülnek:

- (1) Az $E(\Omega)$ -hoz tartozó A események mindegyikére $0 \leq P(A) \leq 1$ teljesül.
- (2) $P(\Omega) = 1$.
- (3) Ha A_i egymást páronként kizáró $E(\Omega)$ -beli események véges vagy végtelen sorozata, akkor

$$P\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$$

Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az $E(\Omega)$ eseményalgebra *valószínűségi algebrát* (másképpen: *valószínűségi mezőt*) alkot a P függvényre nézve. A P függvényt *valószínűségnek*, a $P(A)$ számot az A esemény *valószínűségének* nevezzük.

2.3.2 Tétel Egy $E(\Omega)$ valószínűségi algebra tetszőleges A és B eseményeire igazak az alábbiak:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A);$$

$P(\emptyset) = 0$, azaz a lehetetlen esemény valószínűsége 0;

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

2.4.1 Definíció Legyen Ω véges sok elemi eseményt tartalmazó eseménytér és legyen $E(\Omega)$ az Ω összes lehetséges részhalmazainak halmazalgebrája. Azt mondjuk, hogy $E(\Omega)$ klasszikus valószínűségi algebra a P valószínűségre nézve, ha az Ω eseményteret alkotó elemi események valószínűsége egymással egyenlő.

2.4.2 Tétel Klasszikus valószínűségi algebra bármely A eseményének valószínűségére

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

teljesül, ahol k jelöli az A eseményt alkotó elemi események számát (másképpen: a kedvező esetek számát), n pedig egyenlő az összes lehetséges elemi események (az összes lehetséges esetek) számával.

1. hét — Geometriai valószínűség

2.5.1 Tétel Legyen egy kísérlettel kapcsolatos Ω eseménytér olyan síkbeli (vagy térbeli) ponthalmaz, amelynek van területe (illetve térfogata). Legyen $E(\Omega)$ olyan Ω feletti eseményalgebra, amelyhez tartozó bármely H részhalmaznak van $\mu(H)$ mértéke (területe vagy térfogata). Ha $H \in E(\Omega)$ esetén

$$P(H) = \frac{\mu(H)}{\mu(\Omega)}$$

akkor $E(\Omega)$ valószínűségi algebra P-re nézve.

2.5.2 Definíció Az előző tételben szereplő P függvényt geometriai valószínűségnek nevezzük, az $E(\Omega)$ valószínűségi algebráról pedig azt mondjuk, hogy geometriai valószínűségi algebra (vagy: geometriai valószínűségi mező).

2. hét — Feltételes valószínűség, függetlenség

2.6.1 Definíció Egy valószínűségi algebrának legyen A tetszőleges, B pedig pozitív valószínűségű eseménye. A

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

hányadost az A esemény B eseményre vonatkozó *feltételes valószínűségének* nevezzük.

2.6.2 Tétel Ha B egy $E(\Omega)$ valószínűségi algebra tetszőleges pozitív valószínűségű eseménye, akkor $E(\Omega)$ valószínűségi algebrát alkot az $A \mapsto P(A|B)$ függvényre (mint a B eseményre vonatkozó feltételes valószínűségre) nézve.

2.6.3 Tétel Ha $A_1, A_2, \dots, A_n$ egy valószínűségi algebra olyan eseményei, hogy az $A_1, A_1 A_2, A_1 A_2 A_3, \dots, A_1 A_2 \cdots A_{n-1}$ események pozitív valószínűségűek, akkor

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$$

2.6.5 Tétel Egy valószínűségi algebra pozitív valószínűségű A és B eseményeire az alábbi három feltétel egymással ekvivalens:

$$P(A|B) = P(A);$$

$$P(B|A) = P(B);$$

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

2.6.6 Definíció Egy valószínűségi algebra A és B eseményeit egymástól *függetlennek* nevezzük, ha $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

2.6.7 Definíció Egy valószínűségi algebra tetszőleges számú eseményéről azt mondjuk, hogy *páronként függetlenek*, ha közülük bármelyik kettő egymástól független.

2.6.8 Definíció Egy valószínűségi algebra tetszőleges számú eseményéről azt mondjuk, hogy *teljesen függetlenek*, ha bárhogy is választunk ki közülük véges sokat, azok szorzatának valószínűsége egyenlő a tényezők valószínűségének szorzatával.

2. hét — Teljes valószínűség tétele, Bayes-tétel

2.7.1 Definíció Egy Ω eseménytér bizonyos eseményeinek összességéről azt mondjuk, hogy *teljes eseményrendszert* alkotnak, ha páronként kizárják egymást és összegük az Ω eseménytér.

2.7.2 Tétel (Teljes valószínűség tétele) Ha egy valószínűségi algebrában a $B_1, B_2, \dots, B_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak és mindegyiknek pozitív a valószínűsége, akkor a valószínűségi algebrához tartozó tetszőleges A esemény valószínűsége

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A|B_i)$$

2.7.4 Tétel (Bayes-tétel) Ha egy valószínűségi algebrában a $B_1, B_2, \dots, B_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak és mindegyiknek pozitív a valószínűsége, akkor a valószínűségi algebrához tartozó tetszőleges, de pozitív valószínűségű A eseményre

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{\sum_{k=1}^n P(B_k) \cdot P(A|B_k)}$$

3. hét — Valószínűségi változó

2.8.1 Definíció A valós értékű ξ függvényt *valószínűségi változónak* nevezzük, ha értelmezési tartománya egy kísérlettel kapcsolatos eseménytér, és minden x valós számra értelmezve van a $P(\xi < x)$ valószínűség.

3. hét — Eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény

2.9.1 Definíció Az $F_\xi(x) = P(\xi < x)$ egyenlőséggel definiált egyváltozós valós függvényt a ξ valószínűségi változó *eloszlásfüggvényének* nevezzük.

2.9.3 Tétel Tetszőleges ξ valószínűségi változó $F_\xi(x)$ eloszlásfüggvényére érvényesek az alábbiak:

- (1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_\xi(x) = 0$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} F_\xi(x) = 1$.
- (2) $F_\xi(x)$ monoton nő (és ezért minden pontban létezik a jobb oldali határértéke) és minden pontban balról folytonos.
- (3) Tetszőleges $a < b$ valós szám esetén $P(a \leq \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$.
- (4) Tetszőleges x_0 valós szám esetén $P(\xi = x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} F_\xi(x) - F_\xi(x_0)$. Speciálisan, ha F_ξ folytonos az x_0 pontban, akkor $P(\xi = x_0) = 0$.

2.9.4 Definíció Egy ξ valószínűségi változót *diszkrét valószínűségi változónak* (vagy *diszkrét eloszlásúnak*) nevezünk, ha értékkészlete egy véges $[x_1, \dots, x_n]$ sorozat, vagy egy olyan végtelen $[x_1, x_2, \dots]$ sorozat, amelynek egyetlen pontja sem torlódási pontja ennek a sorozatnak.

2.9.5 Definíció Egy ξ valószínűségi változót *folytonos valószínűségi változónak* (vagy *folytonos eloszlásúnak*) nevezünk, ha megadható egy olyan egyváltozós valós f_ξ függvény, amely mindenütt

nemnegatív, bármely véges intervallumon legfeljebb véges sok pontot kivéve folytonos, és amelyre a ξF_ξ eloszlásfüggvénye minden x valós szám esetén az alábbi módon áll elő:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(t) dt$$

Az f_ξ függvényt a ξ valószínűségi változó *sűrűségfüggvényének* nevezzük.

2.9.6 Tétel Folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye minden pontban folytonos. Ha F_ξ , illetve f_ξ egy folytonos ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, illetve sűrűségfüggvénye, akkor az alábbiak teljesülnek:

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) dx = 1.$

(2) Ha x_0 -ban F_ξ differenciálható, akkor $F_\xi'(x_0) = f_\xi(x_0).$

(3) Tetszőleges $a < b$ valós számok esetén $P(a \leq \xi < b) = \int_a^b f_\xi(x) dx.$

3. hét — Várható érték és szórás

2.10.1 Definíció Legyenek a ξ diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei az $[x_1, x_2, \dots]$ véges vagy végtelen sorozat elemei. Az

$$M(\xi) = \sum_k x_k \cdot P(\xi = x_k)$$

összeget a ξ valószínűségi változó *várható értékének* nevezzük, feltéve, hogy a képletben szereplő sor abszolút konvergens. Ellenkező esetben a ξ várható értékét nem értelmezzük.

2.10.3 Definíció Legyen ξ folytonos valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel. Az

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_\xi(x) dx$$

integrált a ξ valószínűségi változó *várható értékének* nevezzük, feltéve, hogy ez az integrál létezik. Ha nem létezik, akkor a ξ várható értékét nem értelmezzük.

2.10.5 Tétel Ha egy diszkrét vagy folytonos ξ valószínűségi változó négyzetének van várható értéke, akkor ez a várható érték a ξ eloszlásából a következőképpen számítható ki:

(a) Ha ξ diszkrét és értékkészlete $\{x_1, x_2, \dots\}$, akkor $M(\xi^2) = \sum_k x_k^2 \cdot P(\xi = x_k).$

(b) Ha ξ folytonos és sűrűségfüggvénye f_ξ , akkor $M(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_\xi(x) dx.$

2.10.6 Tétel Ha a ξ valószínűségi változó várható értéke létezik, akkor a tetszőleges valós a és b konstansokkal képezett $a\xi + b$ valószínűségi változó várható értéke is létezik, és

$$M(a\xi + b) = a \cdot M(\xi) + b$$

2.10.7 Definíció A ξ és η valószínűségi változó *kovarianciáján* értjük és $c(\xi, \eta)$ -val jelöljük a

$$c(\xi, \eta) = M[(\xi - M(\xi)) \cdot (\eta - M(\eta))]$$

várható értéket, feltéve, hogy létezik.

2.10.8 Definíció A ξ valószínűségi változó *szórásának* nevezzük a

$$D(\xi) = \sqrt{M[(\xi - M(\xi))^2]}$$

értéket, feltéve, hogy a gyökjel alatti várható érték létezik. Ha ez nem létezik, akkor a ξ szórását nem értelmezzük.

2.10.9 Tétel Ha a ξ valószínűségi változó szórása létezik, akkor

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi)$$

2.10.12 Tétel Ha a ξ valószínűségi változó szórása létezik, akkor a tetszőleges valós a és b konstansokkal képezett $a\xi + b$ valószínűségi változó szórása is létezik, és

$$D(a\xi + b) = |a| \cdot D(\xi)$$

2.10.13 Definíció A ξ és η valószínűségi változó *korrelációs együtthatóján* (röviden: *korrelációján*) értjük és $r(\xi, \eta)$ -val jelöljük az

$$r(\xi, \eta) = \frac{c(\xi, \eta)}{D(\xi) \cdot D(\eta)} = \frac{M[(\xi - M(\xi)) \cdot (\eta - M(\eta))]}{D(\xi) \cdot D(\eta)}$$

számot, feltéve, hogy létezik.

4. hét — Diszkrét valószínűségi változók (binomiális, hipergeometriai, Poisson)

2.11.1 Definíció Egy ξ valószínűségi változót *binomiális eloszlásúnak* nevezünk, ha értékkészlete valamely $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ ($n \geq 1$) számhalmaz, eloszlása pedig

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0, 1, \dots, n),$$

ahol p a $0 < p < 1$ feltételnek eleget tevő valós konstans, amelyet a binomiális eloszlás *paraméterének* nevezünk.

2.11.2 Tétel Ha ξ egy $\{0, 1, \dots, n\}$ értékkészletű és p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó, akkor

$$M(\xi) = np, \quad D^2(\xi) = np(1-p)$$

2.11.4 Definíció Egy ξ valószínűségi változót *hipergeometriai eloszlásúnak* nevezünk, ha értékkészlete a $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ ($n \geq 1$) számhalmaz, eloszlása pedig

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad (k=0, 1, \dots, n),$$

ahol N és M olyan pozitív egész számok, amelyekre $n \leq M$ és $n \leq N - M$ teljesülnek. A $p = \frac{M}{N}$ jelöléssel ugyanez:

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad (k=0, 1, \dots, n).$$

2.11.5 Tétel Ha ξ egy olyan $\{0, 1, \dots, n\}$ értékkészletű hipergeometriai eloszlású valószínűségi változó, melynek paraméterei N és p , akkor

$$M(\xi) = np, \quad D^2(\xi) = np(1-p) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

2.11.7 Definíció Egy ξ valószínűségi változót *Poisson-eloszlásúnak* nevezünk, ha értékkészlete a nemnegatív egész számok halmaza, eloszlása pedig

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

ahol λ egy pozitív konstans, amelyet a Poisson-eloszlás *paraméterének* nevezünk.

2.11.8 Tétel Ha ξ egy λ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó, akkor

$$M(\xi) = \lambda, \quad D^2(\xi) = \lambda$$

2.11.10 Tétel Legyenek n és k olyan rögzített egész számok, melyekre teljesül a $0 \leq k \leq n$ feltétel. Továbbá legyen p olyan racionális szám, melyre $0 < p < 1$ teljesül. Fussa be N az összes olyan pozitív egész szám halmazát, amelyekkel Np is egész. Akkor

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\binom{Np}{k} \binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \left(\frac{n}{k}\right) p^k (1-p)^{n-k}$$

2.11.11 Tétel Legyen k rögzített nemnegatív egész szám, és legyen $np = \lambda$ állandó. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

5. hét — Folytonos valószínűségi változók (egyenletes, normális, χ^2 , Student, exponenciális)

2.12.1 Definíció Egy ξ folytonos valószínűségi változót az (a, b) intervallumon *egyenletes eloszlású* valószínűségi változónak nevezünk, ha sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } x \in (a, b) \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

2.12.2 Tétel Ha ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó az (a, b) intervallumon, akkor

$$M(\xi) = \frac{a+b}{2}, \quad D(\xi) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

2.12.4 Definíció Egy ξ folytonos valószínűségi változót (m, σ) paraméterű *normális eloszlásúnak* nevezünk, ha sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

ahol $\sigma > 0$. Az ilyen eloszlást $N(m, \sigma)$ -val jelöljük. Az $N(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változót *standard normális eloszlásúnak* nevezzük; ennek $\varphi(x)$ -szel jelölt sűrűségfüggvénye:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

2.12.5 Tétel Ha a ξ valószínűségi változó $N(m, \sigma)$ eloszlású, akkor

$$M(\xi) = m, \quad D(\xi) = \sigma$$

Ha F_{ξ} jelöli egy $N(m, \sigma)$ eloszlású ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, $\Phi(x)$ pedig a standard normális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, akkor

$$F_{\xi}(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right), \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \quad \text{ha } x \geq 0$$

2.12.6 Definíció Egy η valószínűségi változót n szabadságfokú χ^2 -eloszlásúnak nevezzük, ha megadhatók olyan standard normális eloszlású, egymástól független $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók, hogy

$$\eta = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2$$

2.12.7 Definíció Egy τ valószínűségi változót n szabadságfokú *Student-eloszlásúnak* (vagy *t-eloszlásúnak*) nevezünk, ha megadhatók olyan standard normális eloszlású, egymástól független $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók, hogy

$$\tau = \frac{\sqrt{n} \cdot \xi_0}{\sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}}$$

2.12.8 Definíció A $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változókból képezett $\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]$ n -elemű sorozatot *n-dimenziós valószínűségi változónak* nevezzük.

2.12.9 Definíció A $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változókkal képezett

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n)$$

n -változós valós függvényt a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók *együttes eloszlásfüggvényének* nevezzük.

2.12.10 Definíció A $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változókat egymástól *függetleneknek* nevezzük, ha együttes eloszlásfüggvényük az egyenkénti eloszlásfüggvények szorzata, azaz

$$P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n) = P(\xi_1 < x_1) \cdot P(\xi_2 < x_2) \cdots P(\xi_n < x_n)$$

teljesül tetszőleges $x_1, x_2, \dots, x_n$ valós számokra.

2.12.11 Tétel (Centrális határeloszlás-tétel) Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ egymástól független, azonos eloszlású, közös m várható értékkel és közös σ szórással rendelkező valószínűségi változók. Akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - nm}{\sigma \sqrt{n}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

2.12.12 Definíció Egy ξ folytonos valószínűségi változót λ paraméterű *exponenciális eloszlásúnak* nevezünk, ha sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } 0 < x \end{cases}$$

ahol $\lambda > 0$.

2.12.13 Tétel Ha ξ egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(\xi) = \frac{1}{\lambda}$$

2.12.16 Definíció Egy ξ folytonos valószínűségi változót (λ, α) paraméterű Weibull-eloszlásúnak nevezünk, ha eloszlásfüggvénye

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x^{\alpha}}, & \text{ha } 0 < x \end{cases}$$

ahol $\lambda > 0$ és $\alpha > 0$.

2.12.17 Tétel Ha ξ egy (λ, α) paraméterű Weibull-eloszlású valószínűségi változó, akkor

$$M(\xi) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right),$$

$$D^2(\xi) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{2}{\alpha}} \left(\Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \right)$$